位相空間論による命題論理のコンパクト性定理

Atsuyoshi Muta

2021 年 7 月 31 日

1 概要

命題論理のコンパクト性定理は, 位相空間論を用いればその名の通りコンパクト性に関する性質として見ることができます. この PDF では完全性定理を使用せずに位相空間論に関する知識から直接命題論理のコンパクト性定理を示します.

2 有限交叉性

まず, 閉集合合族の有限交叉性がコンパクト性と同値になることを示す.

定義 1. 有限交叉性

集合 A の部分集合族 $\mathcal{A}$ が有限交叉性を持つとは, 任意の $\mathcal{A}$ の有限個の要素 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ が,

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset,$$

を満たすことである.

命題 2. X を位相空間とする. このとき, 次の 2 条件は同値である.

(1) X はコンパクト.

(2) X の任意の閉集合族 $\mathcal{C}$ が有限交叉性を持つとき,

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

Proof. (1)

$\Longleftrightarrow$ X の任意の開集合族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, $\bigcup O_\lambda = X$ を満たすならばある有限部分集合族 $\{O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \cdots, O_{\lambda_n}\}$ があって $\bigcup_{k \leq n} O_{\lambda_k} = X$.

$\overset{\text{対偶}}{\Longleftrightarrow}$ X の任意の開集合族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, 任意の有限部分集合族 $\{O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \cdots, O_{\lambda_n}\}$ が $\bigcup_{k \leq n} O_{\lambda_k} \neq X$ を満たすならば $\bigcup O_\lambda \neq X$.

$\Longleftrightarrow$ X の任意の閉集合族 $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について, 任意の有限部分集合族 $\{C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}, \cdots, C_{\lambda_n}\}$ が $\bigcap_{k\leq n} C_{\lambda_k} \neq \emptyset$ を満たすならば $\bigcap C_\lambda \neq \emptyset$.
$\Longleftrightarrow$ (2). $\square$